

**Monografia**

**Cleavers and Splitters**

**2007/2008**

Ricardo Filipe Marques Portugal

## Índice

1. Introdução .....	3
2. Teorema de Arquimedes ou Teorema da corda quebrada .....	4
3. Cleavers .....	5
4. O triângulo médio.....	6
5. Centro de massa de um sistema .....	8
6. A Circunferência de Spieker .....	9
7. Splitters .....	10
8. O Ponto de Nagel ou Centro Splitting .....	12
9. A circunferência dos nove pontos.....	14
10. Recta de Euler.....	17
11. O ponto de Nagel e a circunferência Spieker .....	19
12. Breves noções sobre dilatações .....	25
13. Propriedades adicionais .....	27
14. Resolução de exercícios.....	29
15. Bibliografia.....	33

## 1. Introdução

A geometria, nomeadamente a geometria euclidiana continua a dar que falar e a fazer com que inúmeros matemáticos espalhados pelo mundo se continuem a deslumbrar com os seus encantos. Com base nesta ideia, o professor Rui Pacheco propôs-me a realização deste trabalho, baseado no livro “Episodes in Nineteenth and Twentieth Century Euclidean Geometry” de Ross Honsberger.

Temos como objectivo divulgar alguns resultados recentes, elegantes e pouco divulgados sobre geometria euclidiana, que apesar da sua já longa história continua ainda a revelar-se uma fonte inesgotável de investigação. Basta ler algumas das propriedades apresentadas para perceber que com um pouco de criatividade e astúcia é possível criar resultados admiráveis.

Este trabalho encontra-se dividido em duas partes. Numa primeira parte abordamos de forma pormenorizada o 1º capítulo (Cleavers and Splitters) do livro referido. Elaboramos as demonstrações apresentadas no livro, explicando com detalhe algumas passagens omissas no mesmo. Nem sempre se seguiu a mesma metodologia do autor, de qualquer modo o essencial foi sempre preservado. Na segunda parte deste trabalho apresentamos a nossa resolução de alguns exercícios propostos pelo autor.

## 2. Teorema de Arquimedes ou Teorema da corda quebrada

**Teorema 1:** Sendo  $M$  o ponto médio do arco  $ACB$  no semi-círculo  $ABC$ , e sendo  $MD$  perpendicular ao maior dos lados entre  $AC$  e  $BC$ , (no nosso exemplo  $AC$ ). Então  $D$  divide ao meio o caminho poligonal  $ACB$ , ou seja,  $AD = DC + CB$ .

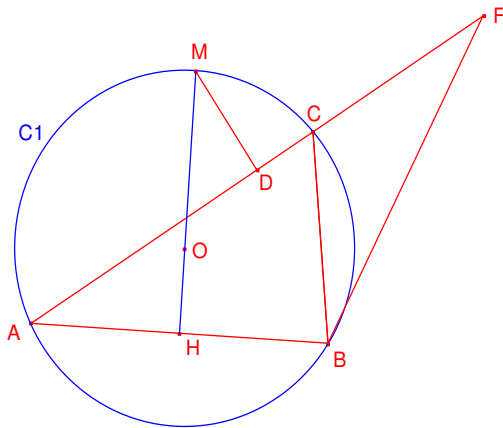


Figura 1

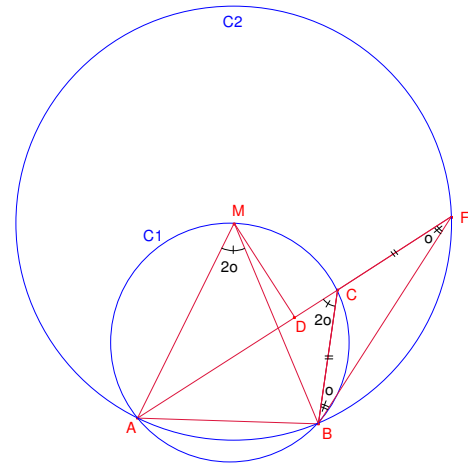


Figura 2

**Demonstração:** Começamos por prolongar  $AC$  até  $F$ , de modo que  $CF = CB$ . Assim, o triângulo  $CFB$  é isósceles (pois tem dois lados iguais). Sendo assim, os ângulos da base são iguais a  $\theta$ . Logo  $ACB = 2\theta$ , porque  $BCF = \pi - 2\theta$ . Tracemos agora a circunferência que passa pelos pontos  $A$ ,  $B$  e  $F$ , ou seja, a circunferência circunscrita ao triângulo  $ABF$ , a que vamos chamar  $C_2$ . Esta circunferência terá o seu centro na intersecção das mediatrizes dos lados do triângulo  $ABF$ , isto é, algures na recta  $MH$ , sendo  $MH$  a mediatriz do lado  $AB$  (ver figura 2). Ora pelo **Teorema do arco capaz**<sup>(1)</sup> concluímos que o centro da circunferência que passa pelos pontos  $A$ ,  $B$  e  $F$  só pode ser o ponto  $M$ , vejamos que  $M$  pertence à mediatriz do lado  $AB$  e o arco  $AB$  subtende um ângulo que é duas vezes o ângulo  $\theta$  subtendido  $AFB$ , ou seja,  $AMB = 2\theta$  e  $AFB = \theta$  sendo o arco  $AB$  o arco subtendido pelos dois ângulos, logo nestas condições a única conclusão que podemos tirar é que  $M$  é o centro da circunferência  $C_2$ . Assim, em  $C_2$ ,  $MD$  é perpendicular desde o centro de  $C_2$  até à corda  $AF$ , isto é,  $MD$  é apótema<sup>(2)</sup> da corda  $AB$ . Como numa circunferência, a perpendicular baixada do centro para uma corda divide-a ao meio, assim como os arcos que ela subtende, vemos que o ponto  $D$  é o ponto médio da corda  $AF$  e daí resulta que:  $AD = DF$ . Então  $DF = DC + CF$ , e como,  $CF = CB$ , temos que:  $AD = DF = DC + CB$ , o que completa a demonstração. ■

<sup>(1)</sup> **Teorema do arco capaz:** "A amplitude de um ângulo inscrito numa circunferência é igual a metade do arco por ele subtendido." [3;pág.40]

<sup>(2)</sup> Apótema de uma corda é o segmento da perpendicular baixada para a corda. [4;pág. 140]

### 3. Cleavers

Ao longo de todo o trabalho iremos usar o termos “cleaver” que, por definição, é um segmento que divide o perímetro de um triângulo qualquer ao meio e que passa pelo ponto médio de um dos lados. Não foi feita a tradução deste termo, uma vez que tal significa “faca de talhante”, e não conhecemos o termo português equivalente.

Vamos analisar de seguida um corolário que resulta como consequência imediata do Teorema de Arquimedes.

**Corolário 1:** *Seja  $C'$  o ponto médio de  $AB$  Então  $C'D$  é um cleaver e é paralelo à bissetriz do ângulo  $C$ .*

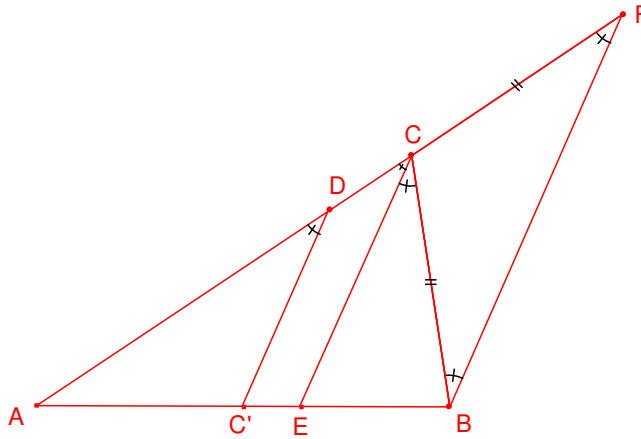


Figura 3

Ora pelo Teorema de Arquimedes, se  $C'$  é o ponto médio de  $AB$ ,  $C'D$  terá metade do perímetro do triângulo  $ABC$ , ver figura 3. Repare-se que  $C'A = C'B$ , pois  $C'$  é o ponto médio do lado  $AB$ , pelo Teorema de Arquimedes sabemos que:  $AD = DC + CB$ , portanto  $C'A + AD = DC + CB + C'B$ .

**Demonstração:** Pelo Teorema de Arquimedes, se  $C'$  é o ponto médio de  $AB$ ,  $C'D$  é um cleaver do  $\Delta ABC$  (ver figura 3). O nosso objectivo é mostrar que  $\sphericalangle ADC' = \sphericalangle ACE$ , o que é equivalente a mostrar que  $\sphericalangle ADC' = \sphericalangle AFB$ , uma vez que  $\sphericalangle ACE = \sphericalangle AFB$  (porque  $\sphericalangle ACB = 2\theta$  e  $\sphericalangle AFB = \theta$ , mas  $\sphericalangle ACE$  é o ângulo formado pela bissetriz de  $\sphericalangle ACB$ , logo  $\sphericalangle ACE = \theta$ ). Vamos observar com atenção os  $\Delta AC'D$  e  $\Delta AFB$ . Ora  $AC' = \frac{1}{2}AB$  (porque  $C'$  é o ponto médio de  $AB$ ),  $AD = DC + CB$  (pelo Teorema de Arquimedes) e  $\sphericalangle FAB$  é comum a ambos os triângulos, logo

pelo critério LAL os dois triângulos são semelhantes, daí que  $\sphericalangle ADC' = \sphericalangle AFB$ . Assim sendo, uma vez que se uma recta que intersecta outras duas rectas  $l_1$  e  $l_2$  com ângulos alternados congruentes então essas rectas são paralelas, podemos concluir, que o cleaver  $C'D$  e a bissectriz do ângulo  $C$  são segmentos paralelos.

■

## 4. O triângulo médio

Os resultados que iremos enunciar (a demonstração poderá ser consultada na bibliografia referenciada) vão ajudar-nos a demonstrar o teorema do triângulo Médio.

**Teorema 2:** *“Se são iguais os segmentos determinados numa transversal por três ou mais paralelas, estas determinam noutra transversal segmentos iguais entre si.”* [4]

**Corolário 2:** *“A paralela ao lado  $AC$  do  $\Delta ABC$ , tirada pelo ponto médio do lado  $AB$ , bissecta o lado  $BC$ .”* [4]

**Teorema do triângulo médio:** *“O segmento de recta que une os pontos médios de dois lados de um triângulo é paralelo ao outro lado e igual à sua metade.”* [4]

Este último teorema é frequentemente enunciado do seguinte modo:

*O triângulo  $A'B'C'$ , determinado pelo pé das medianas, ou seja, pelos pontos médios dos lados, é chamado o triângulo médio do  $\Delta ABC$ . O qual pode ser representado pela figura 4.*

**Teorema 3:** O cleaver  $C'D$  é paralelo à bissetriz do ângulo em  $C$ .

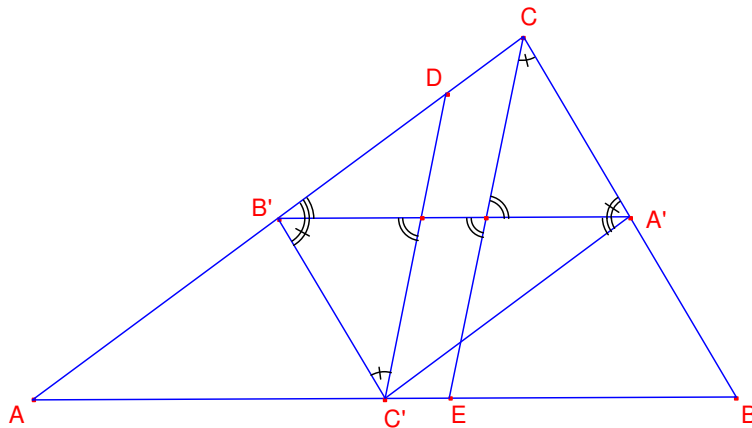


Figura 4

**Demonstração:** Vamos começar por construir o segmento  $A'C' \parallel AC$ .

Se pelo ponto  $B'$  se tirar uma recta paralela a  $AB$ , esta recta passa pelo ponto  $A'$  (pelo corolário 2), concluindo-se assim que  $B'A' \parallel AB$ .

Se  $A'C' \parallel AC$ , o ponto  $C'$  é o ponto médio do lado  $AB$  (pelo corolário 2), ou seja,  $AC' = C'B$ .

Como  $AB'A'C'$  é um paralelogramo, teremos  $B'A' = AC'$  e, portanto,  $B'A' = \frac{1}{2}AB$ .

Assim, pelo Teorema 1 resulta  $B'A' \parallel AB$ ;  $C'A' \parallel AC$ ;  $B'C' \parallel CB$ . Deste modo,  $CB'C'A'$  é um paralelogramo. Sabemos também que os ângulos opostos de um paralelogramo são iguais (pág. 117), ou seja,  $\sphericalangle C' = \sphericalangle C$ , o que faz com que o cleaver  $C'D$ , que já é paralelo à bissetriz  $CE$  do ângulo  $C$ , é também a bissetriz do ângulo  $C'$  no triângulo médio.

De forma análoga é possível mostrar que os outros dois cleavers são também bissetrizes do triângulo médio e o centro cleavance é, por isso o incentro<sup>(3)</sup>  $S$  do triângulo  $A'B'C'$ , tal como se pode observar na figura 5.

■

<sup>(3)</sup> Incentro de um triângulo é o centro da circunferência inscrita no triângulo e obtêm-se a partir da intersecção das bissetrizes do mesmo. [4;pág 78]

Sendo assim, podemos concluir que uma bissetriz do triângulo médio do triângulo  $ABC$  divide ao meio o perímetro do triângulo  $ABC$ .

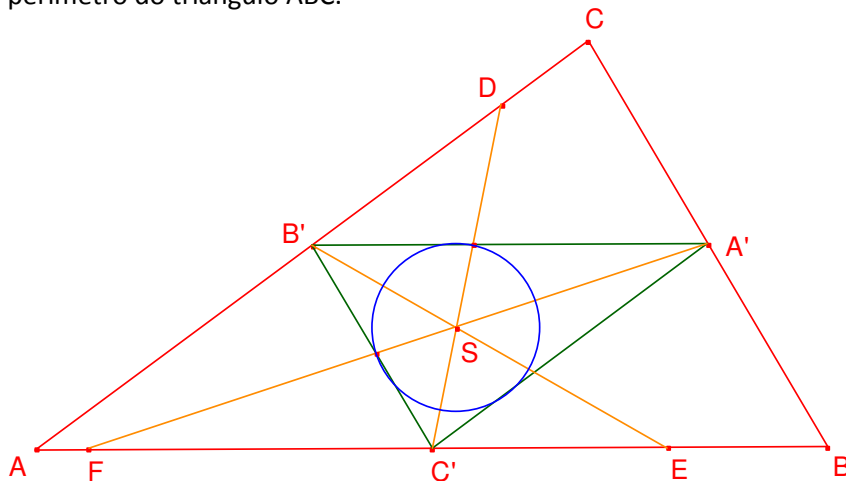


Figura 5

## 5. Centro de massa de um sistema

Decidimos elaborar este capítulo para rever alguns conceitos que serão importantes para a compreensão das próximas demonstrações. A informação existente aqui adaptada do capítulo 14 do livro: “Curso de Geometria” de Paulo Ventura Araújo. Se pretender aprofundar os conceitos envolvidos poderá consultar a bibliografia referenciada.

Vamos supor que temos dois corpos de massas, possivelmente diferentes, pendurados nas extremidades de uma vara rígida de massa desprezável. Há um único ponto  $O$  em que a vara pode ser apoiada de modo a que o sistema fique em equilíbrio;  $O$  é o **centro de massa do sistema**.

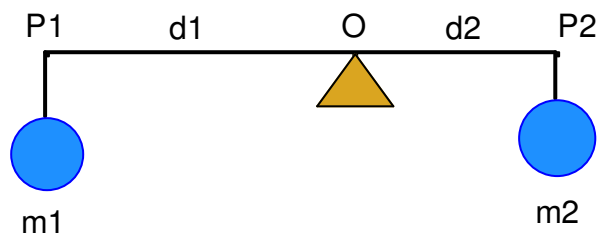


Figura 6

A posição de  $O$  é determinada pela seguinte condição (observe a figura): chamemos  $d_1$  à distância entre  $O$  e a extremidade  $P_1$  onde  $m_1$  está pendurada, e  $d_2$  à distância entre  $O$  e  $P_2$ ; então tem-se  $m_1 d_1 = m_2 d_2$ .

## 6. A Circunferência de Spieker

À circunferência inscrita no triângulo médio, chamamos circunferência de Spieker de um triângulo dado, em honra ao geômetra alemão do século XIX Theodor Spieker. Já verificámos, anteriormente, que o centro cleavance S do triângulo ABC é o centro da sua circunferência de Spieker. Como cada cleaver divide o perímetro do triângulo dado e passa pelo seu centro cleavance, então vamos mostrar que S é o centro de gravidade do triângulo ABC. Para isso, vamos considerar que o triângulo ABC é constituído por uma estrutura homogénea de arames de comprimento a, b, e c (Figura 7).

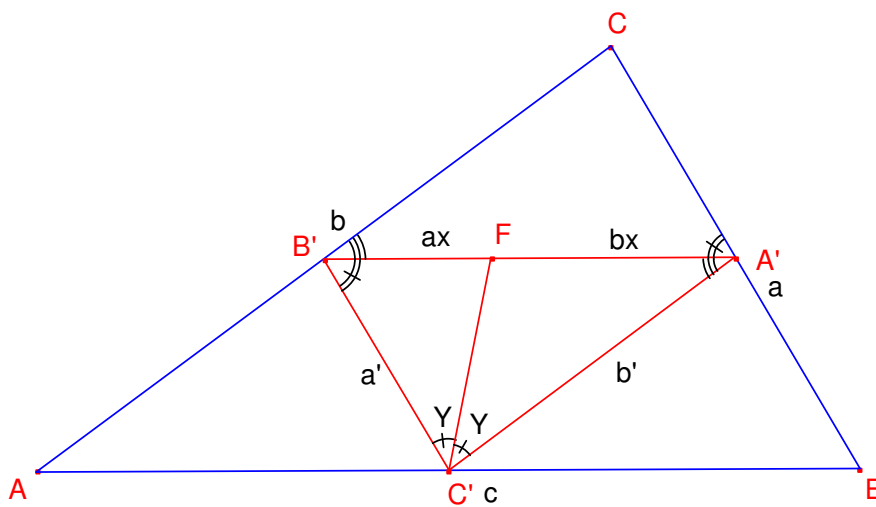


Figura 7

Vamos considerar os pontos médios dos arames (lados do triângulo) como centros de gravidade de cada um das arestas. Assim, e como os comprimentos dos arames podem ser diferentes, vamos construir um sistema de massas de magnitude a, b e c “condensadas” nos vértices A', B' e C' do triângulo médio. Observando a figura 7, onde  $\alpha = \sphericalangle B'FC'$  e aplicando a lei dos senos<sup>(4)</sup> é possível estabelecer as seguintes relações:

$$\frac{B'F}{\sin \gamma} = \frac{B'C'}{\sin \alpha} ; \quad \frac{FA'}{\sin \gamma} = \frac{A'C'}{\sin \alpha}$$

<sup>(4)</sup> **Lei dos senos:** Em qualquer triângulo, cada lado é o produto do diâmetro da circunferência circunscrita pelo seno do ângulo oposto: ou seja, chamando R ao circunraio de  $\triangle ABC$ , tem-se  $a = 2R \sin \alpha$ ;  $b = 2R \sin \beta$ ;  $c = 2R \sin \gamma$  ou ainda  $\frac{a}{\sin \alpha} = \frac{b}{\sin \beta} = \frac{c}{\sin \gamma} = 2R$ . [3; pág.73].

Ora,

$$\sin y = \frac{B'F \sin \alpha}{B'C'}; \quad \sin y = \frac{FA' \sin \alpha}{A'C'}$$

ou seja:

$$\frac{B'F \sin \alpha}{B'C'} = \frac{FA' \sin \alpha}{A'C'} \Leftrightarrow B'F \cdot A'C' = B'C' \cdot FA'.$$

Assim, resulta naturalmente a seguinte relação:

$$\frac{B'F}{FA'} = \frac{B'C'}{C'A'} = \frac{a'}{b'}.$$

Mas tal como já verificámos, os lados do triângulo médio tem metade do comprimento dos lados do triângulo maior, por isso:

$$\frac{B'F}{FA'} = \frac{a'}{b'} = \frac{a/2}{b/2} = \frac{a}{b}.$$

Sabemos que,  $B'F = ax$  e  $FA' = bx$  então pela definição de centro de massa resulta, imediatamente, a seguinte igualdade  $b(ax) = a(bx)$ .

Assim, concluímos que o centro de gravidade deve assentar algures no cleaver  $C'F$ . Assentando de forma semelhante em cada um dos outros dois cleavers. O que prova que o centro de gravidade é de facto o centro cleavance  $S$  do triângulo  $ABC$ .

## 7. Splitters

No capítulo 4 chamámos cleaver a um segmento que divide o perímetro no ponto médio de um lado. Assim, iremos chamar *spliter* ao segmento que divide o perímetro do triângulo ao meio, mas que sai de um dos vértices do mesmo. Deste modo, num triângulo qualquer  $ABC$  existirão três splitters, que se intersectarão num ponto  $M$  chamado centro splitting ou ponto de Nagel.

Repare-se de seguida que a circunferência ex-inscrita (tangente a um dos lados e aos prolongamentos dos outros dois) oposto ao vértice  $A$  intersecta os lados dos vértices do triângulo  $ABC$  em  $D$ ,  $E$  e  $F$  tal como se pode observar na figura seguinte.

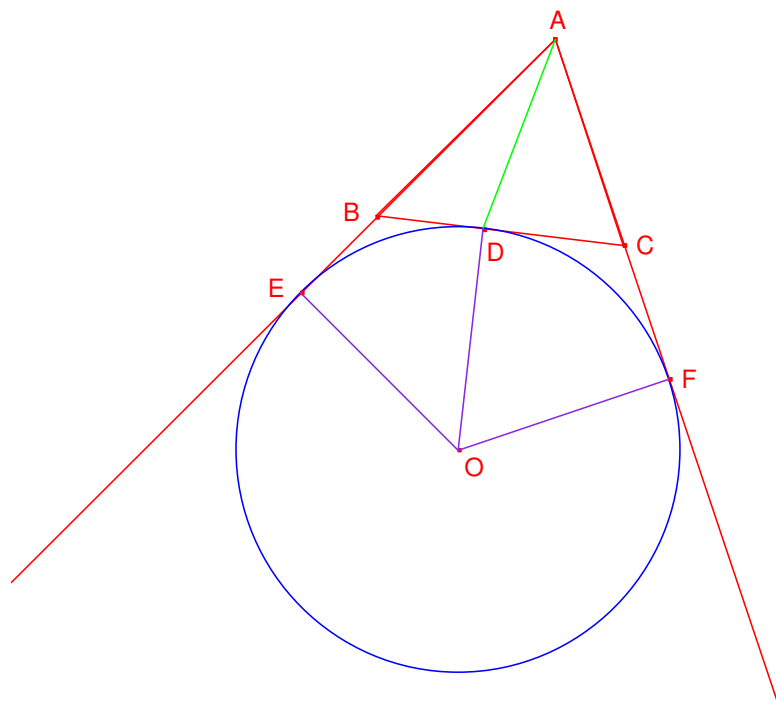


Figura 8

Então, como os pontos de contacto das duas tangentes a uma dada circunferência tiradas por um mesmo ponto exterior  $P$  estão à mesma distância de  $P$ , podemos afirmar que:

$$BE = BD \text{ e } DC = CF.$$

Logo  $AE = AB + BE$  que é o semiperímetro do triângulo  $ABC$ , uma vez que  $BE = BD$ , e desta forma  $AD$  é um spliter do triângulo  $ABC$ .

Assim, a concorrência dos spliters é equivalente a dizer que os três segmentos que unem cada vértice ao lado oposto no ponto de intersecção da circunferência ex-inscrita correspondente são concorrentes, e esse ponto de intersecção, conhecido há muito tempo, é chamado de **ponto Nagel** do triângulo.

## 8. O Ponto de Nagel ou Centro Splitting

Vamos provar a existência do ponto Nagel usando o Teorema de Ceva, o qual vamos apenas enunciar, sem demonstração.

**Teorema de Ceva** <sup>(5)</sup>: As cevianas  $\overline{AX}$ ,  $\overline{BY}$ , e  $\overline{CZ}$  do  $\Delta ABC$  concorrem num ponto se e só se for

$$\frac{BX}{XC} \cdot \frac{CY}{YA} \cdot \frac{AZ}{ZB} = 1$$

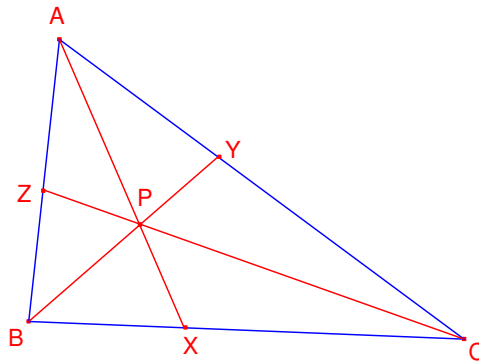


Figura 9

Vamos começar por considerar o  $\Delta ABC$  e as suas três circunferências ex-inscritas, que designamos por  $C_1, C_2$  e  $C_3$ .  $D, E$  e  $F$  são os pontos de intersecção das circunferências ex-inscritas com os lados  $AB, AC$  e  $BC$ , respectivamente. Estabelecemos as seguintes notações:

$$AE = a_1; \quad EC = a_2; \quad AD = b_1; \quad BD = b_2; \quad BF = c_1; \quad FC = c_2$$

tal como se pode observar na figura 10.

---

<sup>(5)</sup> Poderá consultar a demonstração em [3; pág.91]

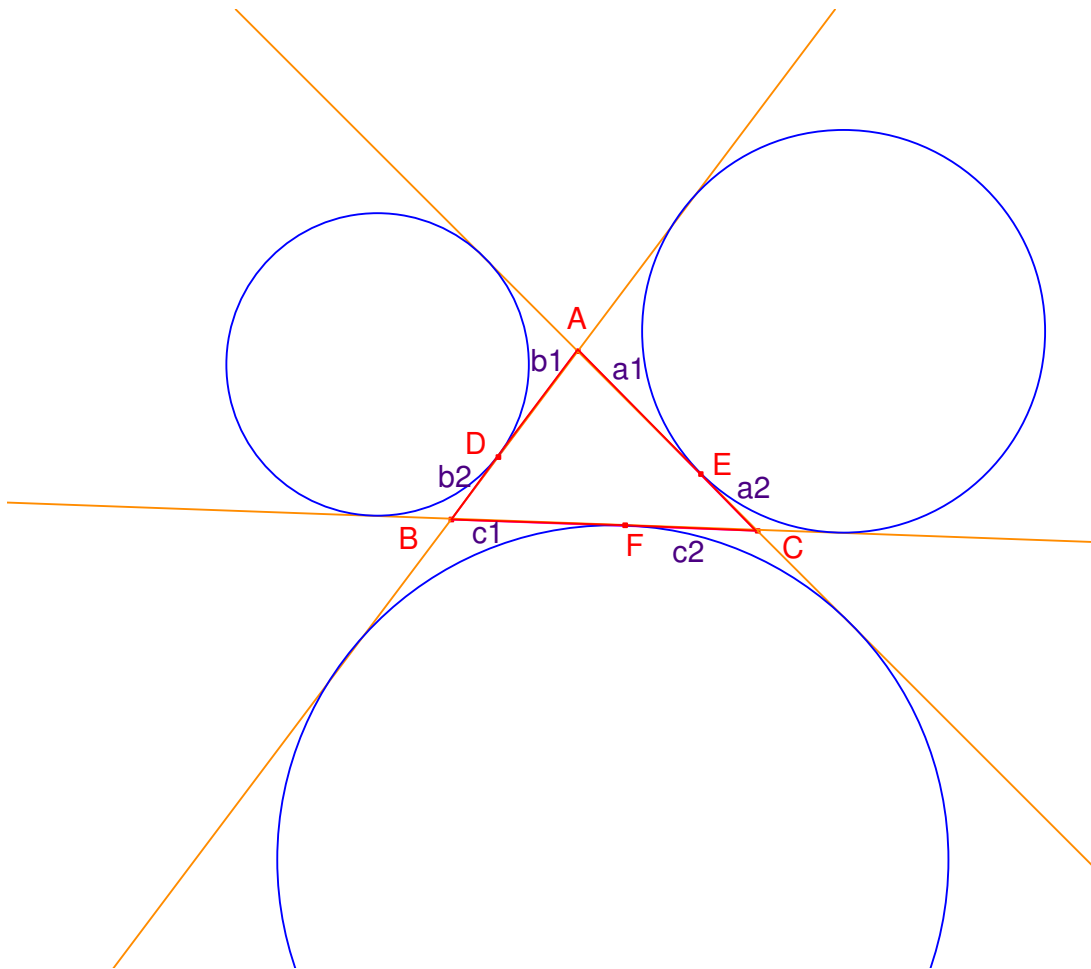


Figura 10

Observando a figura e usando a definição de spliter, podemos estabelecer as seguintes relações:

$$a_1 + a_2 + c_2 = b_1 + b_2 + c_1 \quad (1)$$

$$c_1 + c_2 + a_2 = b_1 + b_2 + a_1 \quad (2)$$

$$c_1 + c_2 + b_2 = a_1 + a_2 + b_1 \quad (3)$$

Subtraindo membro a membro (1) a (2)

$$a_1 - c_1 = c_1 - a_1, \quad \text{isto é,} \quad a_1 = c_1$$

Subtraindo membro a membro (1) a (3)

$$c_2 - b_1 = b_1 - c_2, \quad \text{isto é,} \quad b_1 = c_2$$

Subtraindo membro a membro (2) a (3)

$$a_2 - b_2 = b_2 - a_2, \quad \text{isto é,} \quad a_2 = b_2$$

Pelo teorema de Ceva temos que:

$$\frac{c_1}{c_2} \cdot \frac{a_2}{a_1} \cdot \frac{b_1}{b_2} = 1,$$

usando as relações anteriores temos que:

$$\frac{a_1}{c_2} \cdot \frac{a_2}{a_1} \cdot \frac{c_2}{a_2} = 1,$$

logo podemos concluir que os três splitters concorrem num ponto a que podemos chamar Centro Splitting ou Ponto Nagel. ■

## 9. A circunferência dos nove pontos

**Teorema 4:** *Dado um triângulo  $\Delta ABC$ , os pontos médios dos seus lados, os pés das alturas e os pontos de Euler pertencem a uma mesma circunferência.*

É comum na prática usar as letras H, G, O, I, N para indicar, respectivamente, o ortocentro, baricentro, circuncentro, incentro e o centro da circunferência dos 9 pontos.

Nesta fase convém recordar que:

- O ortocentro H é o ponto de intersecção das 3 alturas de um triângulo;
- O baricentro G é o ponto de intersecção das 3 medianas de um triângulo;
- O circuncentro O é o centro da circunferência que passa pelos vértices e por conseguinte o ponto de intersecção das bissetrizes dos três lados.

**Demonstração:** Consideremos o  $\Delta ABC$  onde os pontos L, M e K são os pontos médios dos lados CB, AC e AB, respectivamente. Os pontos D, E e F são os pés das alturas do triângulo e H o ortocentro (ponto de intersecção das alturas do triângulo). Aos pontos médios X, Y, Z dos segmentos AH, BH e CH chamamos pontos de Euler.

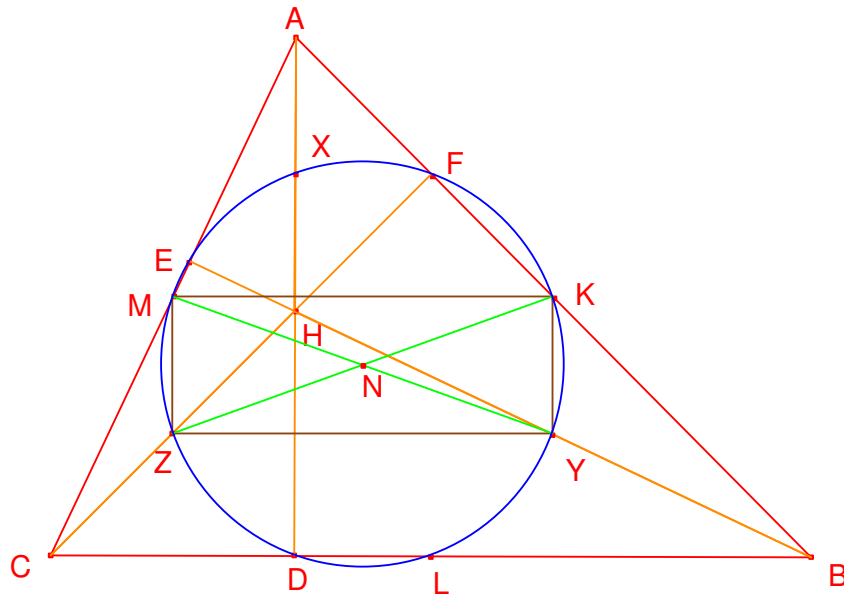


Figura 11

Pelo Teorema do triângulo médio concluímos que:

$$MK \parallel CB \quad \text{e} \quad MK = \frac{1}{2}CB.$$

De forma análoga, mas considerando o  $\Delta CHB$ , temos que:

$$ZY \parallel CB \quad \text{e} \quad ZY = \frac{1}{2}CB.$$

Como  $MK \parallel CB$  e  $ZY \parallel CB$ , por transitividade  $MK \parallel ZY$  e, por isso, o quadrilátero  $MKZY$  é um paralelogramo. É possível agora provar, de modo muito semelhante, que  $KY \parallel AD$ , para isso basta considerar o  $\Delta AHB$  e usar novamente o teorema do triângulo médio para concluir que:

$$KY \parallel AD \quad \text{e} \quad KY = \frac{1}{2}AH.$$

Do mesmo modo se mostra que  $MZ \parallel AD$  e que  $MZ = \frac{1}{2}AH$ . Assim, como  $KY \parallel AD$  e  $MZ \parallel AD$  temos, por transitividade que  $KY \parallel MZ$ .

Sabemos que  $AD$  é perpendicular a  $CB$ , pois é uma das alturas do  $\Delta ABC$ . Ora,

$$MK \parallel ZY \parallel CB \quad \text{e} \quad MZ \parallel KY \parallel AD,$$

Então,

$$MZ \perp MK, MZ \perp ZY, KY \perp MK \text{ e } KY \perp ZY$$

logo o paralelogramo  $MKZY$  é um rectângulo.

De modo semelhante prova-se que o quadrilátero  $XYLM$  é um rectângulo. Assim, o rectângulo  $MZKY$  está inscrito numa circunferência em que as suas diagonais são diâmetros da circunferência. Nesta fase precisamos verificar que as diagonais se intersectam no mesmo ponto, para isso apenas precisamos observar que uma das diagonais dos rectângulos é comum a ambos: o rectângulo  $MZKY$  tem diagonal  $MY$ . Por outro lado, o rectângulo  $XMLY$  também tem diagonal  $MY$ , logo o ponto de intersecção das diagonais tem que ser o mesmo, o que prova que a circunferência é única. Apenas nos falta mostrar que os restantes pontos pertencem à circunferência, para isso vamos usar os seguintes factos.

- “Um triângulo rectângulo está inscrito numa circunferência cujo diâmetro é a sua hipotenusa.”
- “Todo o triângulo inscrito numa semi-circunferência é rectângulo.”

Considerando o  $\triangle EYM$  rectângulo em  $E$ , com hipotenusa  $YM$ , temos que o ponto  $E$  é um ponto da circunferência. Se considerarmos o  $\triangle FZK$  rectângulo em  $F$ , com hipotenusa  $ZK$ , concluímos que  $F$  é um ponto da circunferência. Do mesmo modo, para o  $\triangle DXL$  rectângulo em  $D$  com hipotenusa  $XL$  se pode dizer que o ponto  $D$  pertence à circunferência. Por outro lado,  $XMLY$  é um rectângulo e  $MY$  a sua diagonal, portanto  $X$  e  $L$  são pontos da circunferência. Deste modo, mostramos a existência da circunferência dos nove pontos. ■

## 10. Recta de Euler

Leonhard Euler (1707 - 1783) é um dos grandes nomes da matemática. Originalmente seu pai queria que ele fosse um eclesiástico, porém entregou sua educação a um dos matemáticos famosos da época Jacob Bernouilli e a partir daí o seu entusiasmo pela matemática foi crescente. Casou-se e teve uma família de 13 filhos. No período de 1727 a 1783, ano de sua morte, produziu 886 trabalhos de matemática, produzindo em média 800 páginas de matemática por ano, apesar de ter perdido sua visão em 1771.

Ele produziu em todas as áreas da matemática da época. Sua obra é um capítulo na História da Matemática. Várias fórmulas geométricas e várias construções tiveram o seu nome vamos de seguida apresentar a Recta de Euler.

**Teorema 5:** Num  $\Delta ABC$ , o baricentro, ortocentro e circuncentro são colineares. O baricentro encontra-se entre o ortocentro e o circuncentro e a distância ao ortocentro é o dobro da distância ao circuncentro. A recta que passa por estes três pontos é chamada recta de Euler.

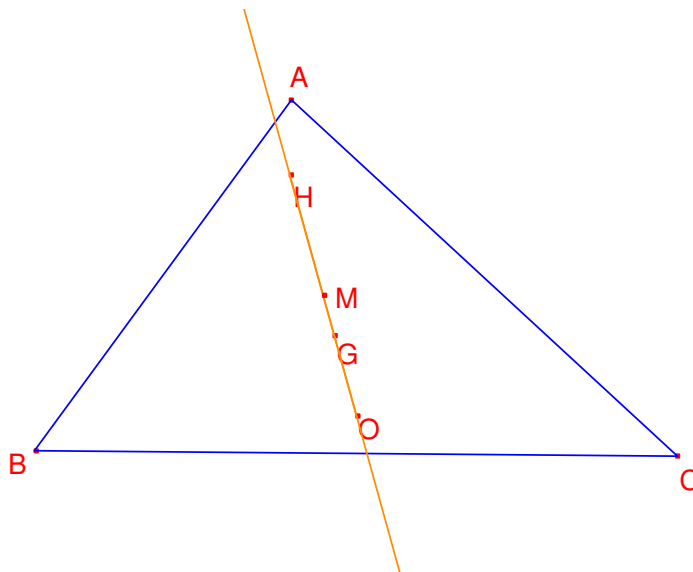


Figura 12

**Demonstração:** Para provar que os três pontos são colineares, vamos considerar três casos distintos:

- 1º caso (O  $\Delta ABC$  é um triângulo equilátero)

Neste caso, os três pontos  $G$ ,  $H$  e  $O$  coincidem, logo, são colineares.

- 2º caso (O  $\Delta ABC$  é um triângulo isósceles)

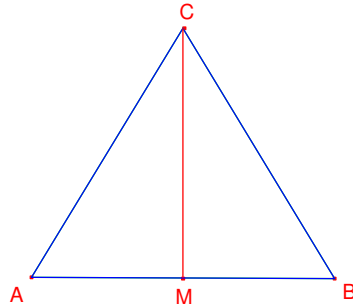


Figura 13

A mediana  $CM$  relativa à base  $AB$  é a altura correspondente à base, bem como a mediatriz relativamente ao vértice  $C$ . Logo todos os pontos ( $G$ ,  $H$  e  $O$ ) pertencem à mesma recta.

- 3º caso (O  $\Delta ABC$  é escaleno)

Neste caso o baricentro ( $G$ ) que pertence à mediana e o circuncentro ( $O$ ) que pertence à mediatriz são pontos distintos, pois a mediana é distinta da mediatriz. Se considerarmos uma recta  $l$ , que passe pelos pontos  $G$  e  $O$ . Vamos também determinar um ponto  $H'$ , de modo que  $GH' = 2GO$ .

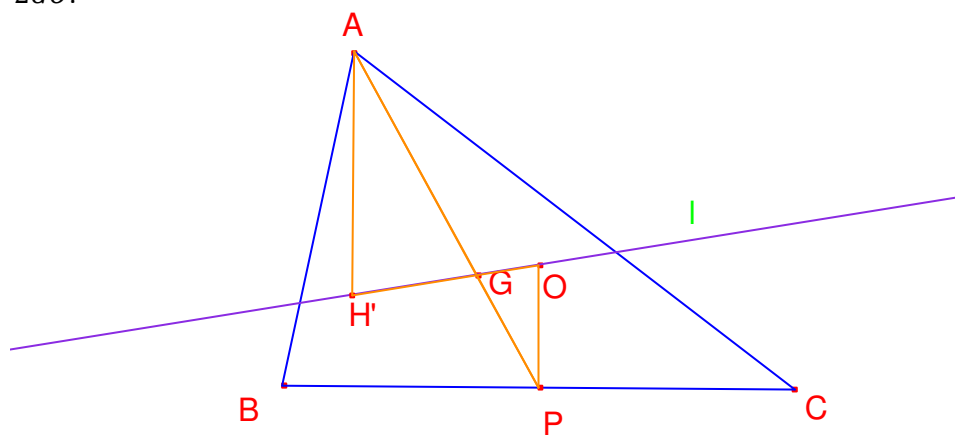


Figura 14

Deste modo, os  $\Delta GH'A$  e  $\Delta GOP$  são semelhantes pelo critério LAL, repare-se que o ponto  $G$  divide a mediana na razão de 2:1, o ponto  $H'$  foi construído de modo que  $GH' = 2GO$  e o

ângulo formado entre os dois lados é igual uma vez que são ângulos verticalmente opostos, por isso os ângulos correspondentes são congruentes. Assim a recta que passa por A e H' é paralela à mediatriz OP, logo H' é um ponto da altura relativamente ao lado BC.

Fazendo o mesmo relativamente à mediana e à mediatriz de outro lado do triângulo obtemos que H' pertence à altura relativa a esse lado.

Assim, podemos concluir que  $H' = H$  em que H é o ortocentro do triângulo ABC e por consequência são pontos colineares (porque pertencem à recta l). ■

## 11. O ponto de Nagel e a circunferência Spieker

Antes de iniciar este capítulo vamos enunciar e demonstrar um resultado que nos será útil.

**Teorema 6:** *Seja  $(ABC)$  a área do triângulo ABC e  $s$  o seu o semi-perímetro. Então  $(ABC) = sr$*

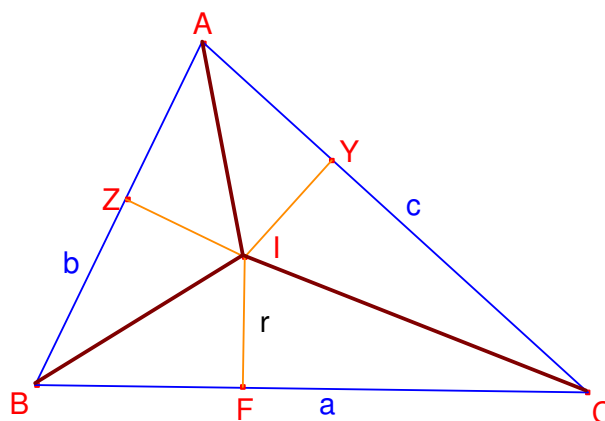


Figura 15

**Demonstração:** A partir do  $\triangle IBC$  com base  $a$  e altura  $r$ , temos que a sua área:

$$(IBC) = \frac{1}{2}ar.$$

Analogamente para os restantes triângulos  $(ICA) = \frac{1}{2}cr$  e  $(IAB) = \frac{1}{2}br$ . Assim:  $(ABC) = \frac{1}{2}r(a + b + c) = sr$ . ■

Tal como já referimos nos capítulos anteriores,  $S$  representa o centro da circunferência de Spieker (centro cleavance);  $I$  é o incentro,  $G$  o baricentro e  $M$  o ponto Nagel ou centro Splitting.

Então podemos estabelecer os seguintes resultados paralelos:

- $I$ ,  $G$  e  $M$  são sempre colineares;
- $G$  divide  $IM$  de modo que  $GM = 2IG$ ;
- $S$  é o ponto médio de  $IM$ .

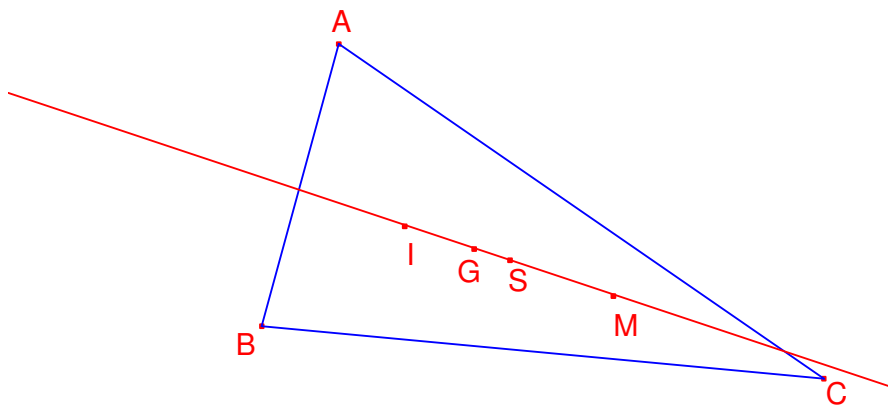


Figura 16

**Vamos agora provar que o ponto  $G$  divide  $IM$  na razão 2:1.**

Traçando a mediana  $AA'$ , sabemos que o baricentro  $G$  divide a mediana na razão de 2:1 [3]. De seguida, vamos prolongar  $IG$  duas vezes o seu comprimento até ao ponto  $L$ , de modo que  $GL = 2IG$ . Deste modo, os  $\triangle AGL$  e  $\triangle A'GI$  são semelhantes (ver figura 17). Pelo critério LAL, repare-se que o ponto  $G$  divide a mediana na razão de 2:1, os pontos  $I$  e  $L$  foram construídos de modo que  $GL = 2IG$  e o ângulo formado entre os dois lados é igual, uma vez que são ângulos verticalmente opostos. Por consequência  $\sphericalangle LAG = \sphericalangle GA'I$  de onde podemos concluir que  $AL$  é paralelo a  $A'I$  <sup>(6)</sup>.

<sup>(6)</sup> **Teorema:** “Se uma recta intersectar duas rectas paralelas  $l_1$  e  $l_2$ , então os ângulos alternados formados pelas intersecções são congruentes.” [3;pág. 35].

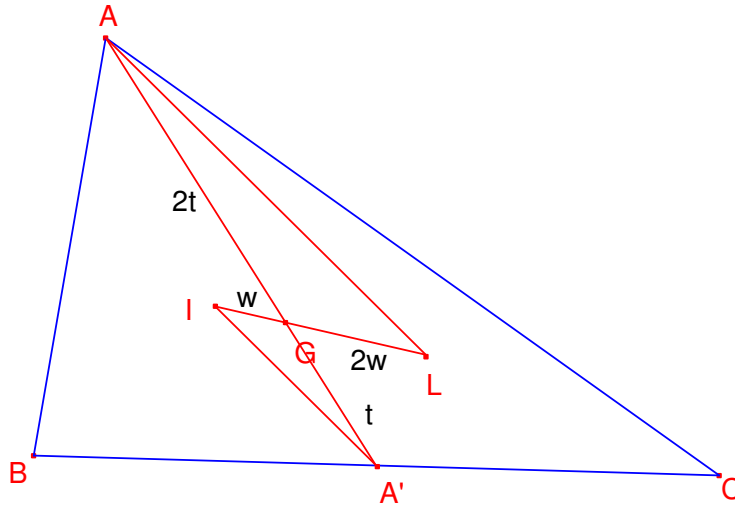


Figura 17

Agora vamos mostrar que L é o ponto de Nagel mostrando que AL; BL e CL são os splitters do  $\triangle ABC$ . Para isso, basta mostrar que AL é splitter. Assim sendo vamos prolongar AL de modo a intersectar BC no ponto E e representamos as perpendiculares AD e IF (ver figura 18). Agora, apenas é necessário verificar que:

$$AB + BE = s, \text{ onde } s \text{ representa o semi-perímetro do } \triangle ABC.$$

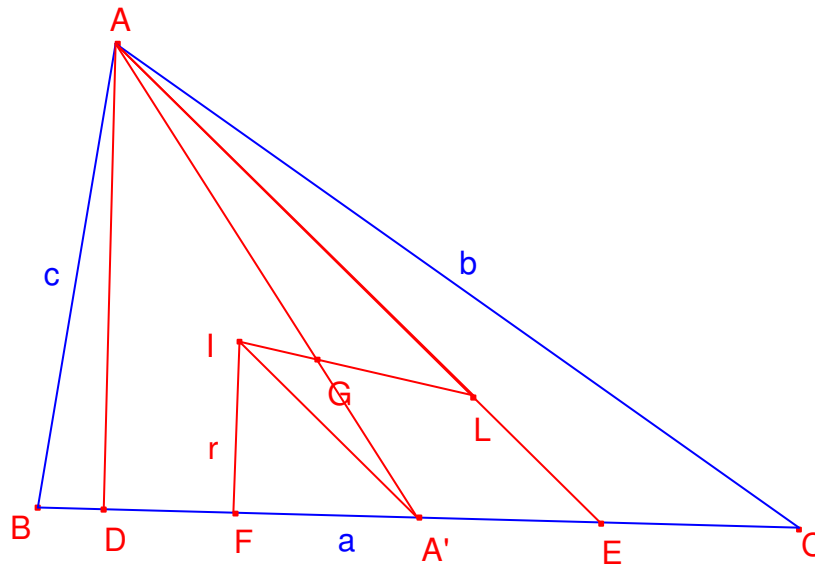


Figura 18

Tal como já dissemos anteriormente, o objectivo é provar que:

$$AB + BE = s, \quad \text{ou seja,} \quad BE = s - AB \Leftrightarrow BE = s - c.$$

Para isso vamos determinar os comprimentos de  $BD$  e  $DE$  e mostrar que a sua soma é, de facto,  $s - c$ , isto é:

$$BE = BD + DE = s - c.$$

Vamos começar por determinar o comprimento de  $DE$ . Observemos que os  $\triangle ADE$  e  $\triangle IFA'$  são semelhantes, visto que ambos são triângulos rectângulos, em  $D$  e  $F$ , respectivamente e, tal como já mostrámos anteriormente,  $AE \parallel IA'$ , logo  $\sphericalangle DAE = \sphericalangle FIA'$  (por um resultado que já enunciámos anteriormente), por isso e usando o critério AA de semelhança de triângulos podemos concluir, que os triângulos são efectivamente semelhantes.

Assim, é possível estabelecer a seguinte relação:

$$\frac{DE}{FA'} = \frac{AD}{IF}.$$

Agora,  $IF$  é o inraio (distância medida na perpendicular do incentro de um triângulo a cada um dos lados) do  $\triangle ABC$  e  $AD$  é a altura relativamente ao lado  $a$ . Pelo teorema 6 e denotando a área do triângulo por  $(ABC)$ , podemos afirmar o seguinte:

$$(ABC) = rs \quad \text{e} \quad (ABC) = \frac{a \times AD}{2}.$$

Assim,

$$rs = \frac{a \times AD}{2}, \quad \text{ou seja,} \quad AD = \frac{2rs}{a}.$$

Ora,

$$\frac{AD}{IF} = \frac{AD}{r},$$

Mas,

$$AD = \frac{2rs}{a}, \quad \text{então} \quad \frac{AD}{IF} = \frac{AD}{r} = \frac{2s}{a}.$$

Daqui podemos concluir que:

$$\frac{DE}{FA'} = \frac{2s}{a} \quad \text{e, conseqüentemente que} \quad DE = \frac{2s}{a} FA'.$$

Para determinar  $FA'$ , vamos recorrer à figura 19, que nos ajudará a tirar conclusões.

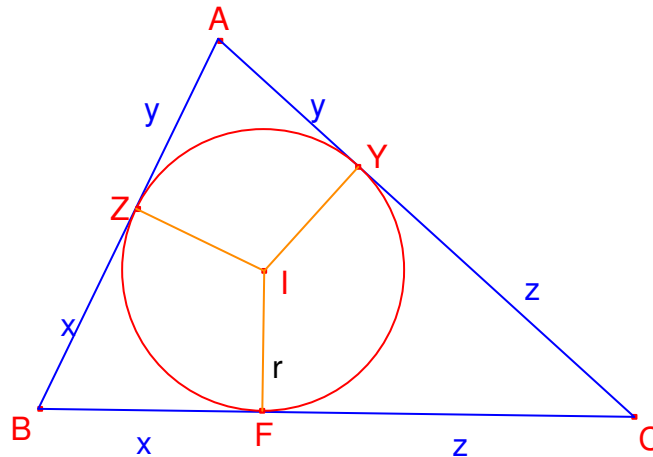


Figura 19

Observando a figura anterior é fácil constatar que:  $x + y + z = s$ .

Então,

$$BF = x = s - b.$$

Por isso o comprimento da tangente  $BF$  é simplesmente  $s - b$ .

Assim, voltando à figura 18 é possível afirmar o seguinte:

$$\begin{aligned} FA' &= BA' - BF = \\ &= \frac{1}{2}a - (s - b) = \frac{1}{2}a - s + b = \\ &= \frac{1}{2}a - \frac{1}{2}(a + b + c) + b = \\ &= \frac{b - c}{2} \end{aligned}$$

Por conseguinte,

$$DE = \frac{2s}{a}FA' = \left(\frac{2s}{a}\right)\left(\frac{b - c}{2}\right) = \frac{s(b - c)}{a}$$

De seguida vamos determinar o comprimento de  $BD$ . Se observarmos o  $\triangle ABD$ , temos que  $BD = c \cos B$ , e pela lei dos co-senos <sup>(7)</sup> temos:

<sup>(7)</sup> **Lei dos cossenos:** Em qualquer triângulo, o quadrado de cada lado é igual à soma dos quadrados dos outros dois lados, menos o dobro do produto desses dois lados e do co-seno do ângulo por eles formado. Por outras palavras, no  $\triangle ABC$  são válidas as relações:  $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \alpha$ ;  $b^2 = c^2 + a^2 - 2ca \cos \beta$ ;  $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \gamma$  [3; pág. 71].

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2a(c \cos B)$$

Ora,

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2a(c \cos B) \Leftrightarrow a^2 + c^2 - b^2 = 2ac \cos B \Leftrightarrow \cos B = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac}$$

Mas,

$$BD = c \cos B = c \left( \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac} \right) = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2a}$$

Finalmente estamos em condições de provar que:

$$BE = BD + DE = s - c.$$

$$\begin{aligned} BE &= \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2a} + \frac{s(b - c)}{a} = \\ &= \frac{a^2 + c^2 - b^2 + 2s(b - c)}{2a} = \\ &= \frac{a^2 + c^2 - b^2 + (a + b + c)(b - c)}{2a} = \\ &= \frac{a^2 + ab - ac}{2a} = \frac{a + b - c}{2} = \\ &= \frac{1}{2}(a + b + c) - c = \\ &= s - c \end{aligned}$$

Assim,  $L = M$  e  $G$  divide  $IM$  de modo que  $IG = \frac{1}{3}IM$ . ■

Antes de avançar, vamos mais uma vez recordar algumas noções importantes sobre dilatações, que serão usadas para as próximas demonstrações.

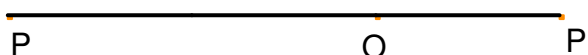
## 12. Breves noções sobre dilatações

Uma dilatação  $G(\mu)$  transforma o ponto  $P$  na sua imagem  $P'$ , colinear com  $O$  e  $P$ , de tal modo que  $OP' = \mu \cdot OP$ . Se  $\mu$  for negativo,  $P'$  e  $P$  estão em lados opostos do ponto  $O$ .

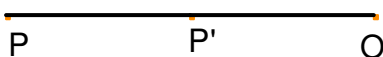
Assim, a dilatação  $O\left(-\frac{1}{2}\right)$  envia o  $P$  para o ponto  $P'$  segundo o segmento  $OP$ , com uma distância que é metade no lado oposto de  $O$ .

Exemplo:

$$O\left(-\frac{1}{2}\right)$$



$$O\left(\frac{1}{2}\right)$$



**Duas propriedades importantes:**

- (i) As formas não se alteram. As dimensões lineares de uma figura são multiplicadas por  $|\mu|$  e por isso a área da figura é torna-se  $\mu^2$  vezes maior, a forma não é alterada, ou seja, a imagem é semelhante à figura original. Isto é estabelecido simplesmente mostrando que  $O(\mu)$  leva um segmento para um segmento paralelo e  $|\mu|$  vezes maior.
- (ii) Uma dilatação de razão  $\mu$  transforma uma circunferência de raio  $r$  numa outra de raio  $|\mu|r$  cujo centro é a imagem do centro da primeira. Reciprocamente, quaisquer duas circunferências  $C$  e  $C'$  de raios  $r \neq r'$  estão relacionadas por duas dilatações, uma de razão positiva e outra de razão negativa. Se elas forem concêntricas, isso é claro, isto porque o centro comum é também o centro de ambas as dilatações. Caso tenham centros distintos  $O$  e  $O'$ , e  $P \in C, P' \in C'$  forem pontos exteriores à recta  $OO'$ , tais que  $\overrightarrow{OP}$  e  $\overrightarrow{O'P'}$  sejam paralelos e com o mesmo sentido (ou em sentido oposto), então a intersecção das rectas  $OO'$  e  $PP'$  é o centro da dilatação positiva (ou negativa) que transforma  $C$  em  $C'$ ; a razão desta dilatação é  $\frac{r'}{r}$  (ou  $-\frac{r'}{r}$ ). As tangentes comuns a  $C$  e a  $C'$ , quando existem, passam pelo centro de alguma dessas dilatações: da positiva

quando  $C$  e  $C'$  estiverem no mesmo lado da tangente, da negativa quando estiverem em lados opostos.

Retomando a nossa incursão **mostraremos que  $S$  é o ponto médio de  $IM$** .

Tal como já referimos várias vezes, o baricentro  $G$  divide a mediana na razão de 2:1, por isso a dilatação  $G\left(-\frac{1}{2}\right)$  transforma o  $\Delta ABC$  no  $\Delta A'B'C'$  (ver figura 20). O incentro do  $\Delta ABC$  é transformado no incentro do  $\Delta A'B'C'$  que é, como sabemos, o centro cleavance (centro da circunferência de Spieker) do  $\Delta ABC$ . Isto acontece porque a imagem de uma circunferência sob uma dilatação é também ela uma circunferência, bem como o centro da circunferência é também ele transformado no centro da sua imagem. A transformação que mencionámos transporta, de facto o ponto  $I$  para o ponto  $S$ . Para tal acontecer é necessário que  $I$ ,  $G$  e  $S$  sejam colineares com  $IG = 2GS$ .

Como

$$IG = \frac{1}{3}IM, \quad \text{então} \quad GS = \frac{1}{6}IM,$$

e somando obtemos

$$IG + GS = \frac{1}{3}IM + \frac{1}{6}IM, \quad \text{isto é,} \quad IS = \frac{1}{2}IM$$

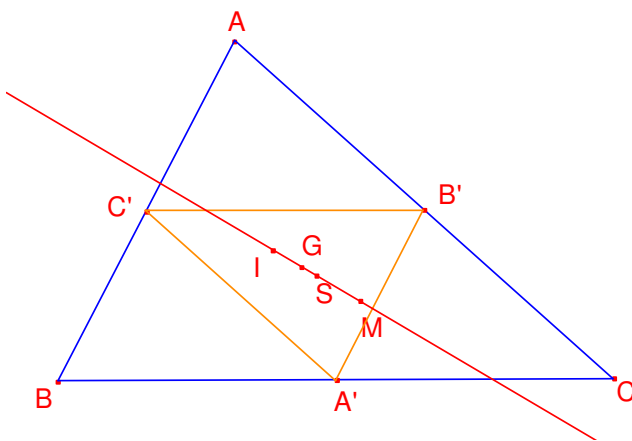


Figura 20

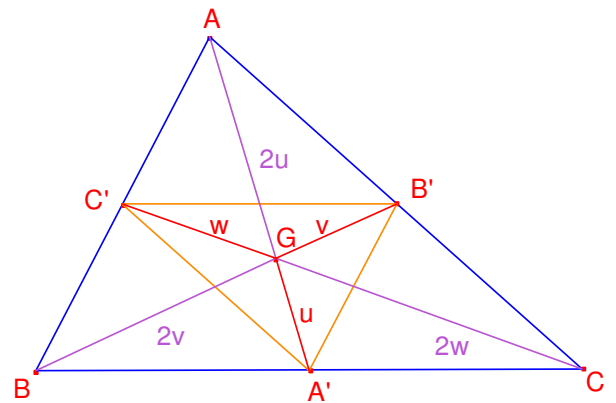


Figura 21

### 13. Propriedades adicionais

Ao longo deste capítulo iremos analisar duas propriedades adicionais e de especial interesse.

**Propriedade 1:** Se considerarmos um  $\Delta ABC$  a dilatação  $G\left(-\frac{1}{2}\right)$  não só transporta o triângulo dado para o triângulo médio  $A'B'C'$  como também, transporta o ponto de Nagel ( $M$ ) do triângulo médio para o incentro do  $\Delta ABC$ , isto porque  $M, G$  e  $I$  são colineares e  $MG = 2GI$ .

Assim, o incentro de um triângulo é o ponto de Nagel do seu triângulo médio.

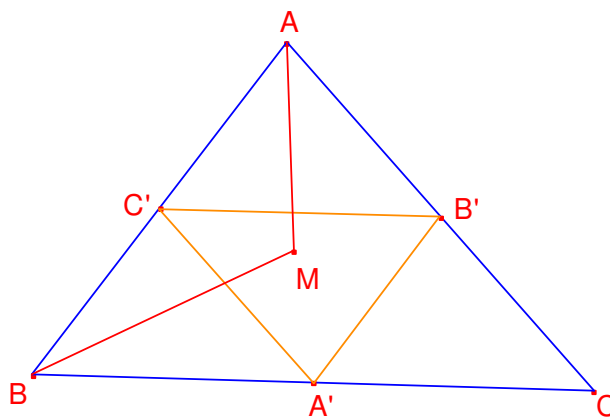


Figura 22

Esta observação representa uma boa construção para o ponto de Nagel, porque basta construir um triângulo e o respectivo triângulo médio, de seguida traçamos duas bissetrizes do triângulo maior e a sua intersecção será o ponto de Nagel do triângulo médio.

Para terminar esta fase, com a apresentação de uma propriedade bastante interessante e fácil de demonstrar.

**Propriedade 2:** Se  $Q_1, Q_2$  e  $Q_3$  são os pontos médios dos segmentos, que unem o ponto de Nagel ( $M$ ) aos vértices  $A, B$  e  $C$  (sombras dos pontos de Euler), então o  $\Delta Q_1Q_2Q_3$  é congruente com o triângulo médio e, para além disso cada lado do  $\Delta Q_1Q_2Q_3$  é tangente à circunferência de Spieker. Assim, a circunferência Spieker é a circunferência inscrita comum aos dois triângulos congruentes  $Q_1Q_2Q_3$  e  $A'B'C'$  (ver figura 23).

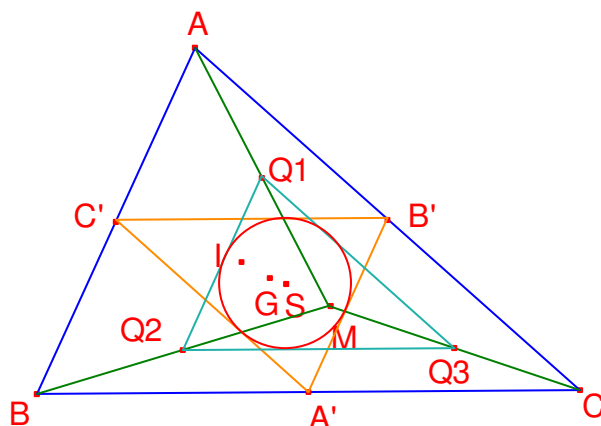


Figura 23

**Demonstração:** A transformação composta  $T$  constituída pela dilatação  $M(2)$  seguida da dilatação  $G\left(-\frac{1}{2}\right)$  em primeiro lugar transporta o  $\Delta Q_1Q_2Q_3$  para o  $\Delta ABC$ , para de seguida transportar o  $\Delta ABC$  para o  $\Delta A'B'C'$ . Isto porque a dilatação  $M(2)$  duplica o comprimento dos lados do triângulo  $\Delta Q_1Q_2Q_3$  enquanto que a transformação  $G\left(-\frac{1}{2}\right)$  os divide em duas partes iguais. Desta forma, o comprimento dos lados do triângulo  $A'B'C'$  é igual ao comprimento dos lados do  $\Delta Q_1Q_2Q_3$ , logo, pelo critério LLL, os triângulos são congruentes.

Ora a transformação  $T$  transporta a circunferência inscrita do  $\Delta Q_1Q_2Q_3$  na circunferência inscrita do  $\Delta A'B'C'$  e, em particular, transporta o incentro  $I$  do  $\Delta Q_1Q_2Q_3$  para o incentro do  $\Delta A'B'C'$ . De seguida vamos considerar o ponto  $S$  e descobrir qual a sua imagem segundo a transformação  $T$ .

Como já sabemos, o ponto  $G$  divide  $IM$ , logo a dilatação  $M(2)$  transporta o ponto  $S$  para o ponto  $I$ , mas como  $IG = 2GS$ , a dilatação  $G\left(-\frac{1}{2}\right)$  transporta novamente o ponto  $I$  para o ponto  $S$ . Assim, o ponto  $S$  é a sua própria imagem sob  $T$ . Não podemos esquecer que  $T$  leva o incentro  $I$  para o ponto  $S$ , isto é, as duas circunferências inscritas têm o mesmo centro e também o mesmo raio, visto que os  $\Delta A'B'C'$  e  $\Delta Q_1Q_2Q_3$  são congruentes, logo as suas circunferências inscritas são coincidentes.

■

## 14. Resolução de exercícios

**Exercício 1:** Este primeiro exercício refere-se ao item precedente do comentário. Uma vez que  $S$  é invariante sob transformação composta  $T$  e  $S$  é o ponto médio de  $IM$ , poderemos pensar que  $T$  é equivalente a meia-volta<sup>(8)</sup> sobre  $S$  (uma vez que  $Q_1, S, A'$  são colineares) Prova ou refuta esta afirmação.

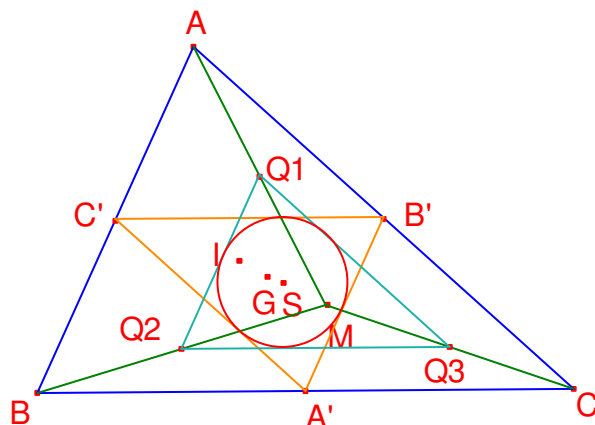


Figura 24

**Resolução:** Tal como já foi verificado os pontos  $Q_1$  e  $Q_2$  são os pontos médios de  $AM$  e  $BM$  então pelo **Teorema:** “O segmento de recta que une os pontos médios de dois lados de um triângulo é paralelo ao outro lado e igual à sua metade.” (já enunciado e demonstrado) concluímos que  $Q_1Q_2 \parallel AB$  e por transitividade vai ser também paralelo a  $A'B'$ . Do mesmo modo se conclui que os três lados do  $\Delta Q_1Q_2Q_3$  são respectivamente paralelos aos lados do  $\Delta A'B'C'$ . Como já vimos os  $\Delta Q_1Q_2Q_3$  e  $\Delta A'B'C'$  têm uma circunferência inscrita comum com centro  $S$ , a meia-volta sobre  $S$  transformaria o  $\Delta Q_1Q_2Q_3$  no  $\Delta A'B'C'$ . (ver definição de meia volta). O que confirma a conjectura:  $Q_1Q_2$  transforma-se em  $A'B'$ ;  $Q_1Q_2$  ao longo de  $A'C'$ , forçando  $Q_1$  a transformar-se em  $A'$ .

■

<sup>(8)</sup> **Meia-volta** ou simetria central é uma isometria que se define do seguinte modo: A imagem de  $Q_1$  pela simetria de centro  $S$  é o ponto  $A'$  tal que  $A', S$  e  $Q_1$  sejam colineares, e (se  $Q_1 \neq S$ )  $S$  é o ponto médio de  $\overline{Q_1A'}$ ; a imagem do centro de simetria  $S$  é o próprio  $S$ , que é o único ponto fixo desta transformação [3;pág.99].

**Exercício 2:** Vamos agora supor que  $X$  é o ponto de intersecção da circunferência inscrita do  $\triangle ABC$  no lado  $BC$ . Vamos provar que as circunferências inscritas dos triângulos  $\triangle ABX$  e  $\triangle ACX$  se intersectam em  $AX$  no mesmo ponto  $P$ .

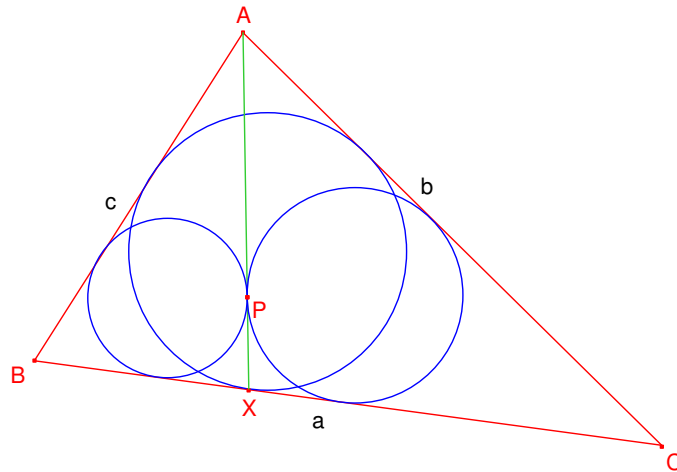


Figura 25

**Resolução:** Vamos supor que as circunferências inscritas dos  $\triangle ABX$  e  $\triangle ACX$  se intersectam em  $AX$ , em  $P$  e  $Q$ , respectivamente. Vamos mostrar que  $P = Q$ . Para isso provaremos que  $XP = XQ$ .

Sejam  $s$ ,  $s_1$  e  $s_2$  os semi-perímetros dos  $\triangle ABC$ ;  $\triangle ABX$  e  $\triangle ACX$ . Então tal como já foi analisado no capítulo 11 (página 22), podemos estabelecer as seguintes relações:

$$BX = s - b; CX = s - c.$$

Usando o mesmo argumento nos  $\triangle ABX$  e  $\triangle ACX$  estabelecemos as seguintes relações:

$$XP = s_1 - AB = s_1 - c$$

$$XQ = s_2 - AC = s_2 - b$$

O ponto  $Q$  não está representado na figura. Para mostrar que  $XP = XQ$  vamos mostrar que

$$XP - XQ = 0.$$

Ora, substituindo nas expressões deduzidas anteriormente, temos que:

$$XP - XQ = s_1 - c - s_2 + b$$

Agora,

$$2s_1 = c + BX + AX$$

$$2s_2 = AX + XC + b$$

Assim,

$$\begin{aligned} 2s_1 - 2s_2 &= c + BX + AX - AX - XC - b = \\ &= c + (s - b) - (s - c) - b = 2c - 2b \end{aligned}$$

Deste modo,

$$s_1 - s_2 = c - b$$

Por isso,

$$XP - XQ = c - b + b - c = 0.$$

■

**Exercício 3:** Vamos agora supor que  $X$  é o ponto de intersecção da circunferência ex-inscrita do  $\triangle ABC$  no lado  $BC$ . Vamos provar que as circunferências ex-inscritas dos  $\triangle ABX$  e  $\triangle ACX$  se intersectam em  $AX$  no mesmo ponto  $P$ .

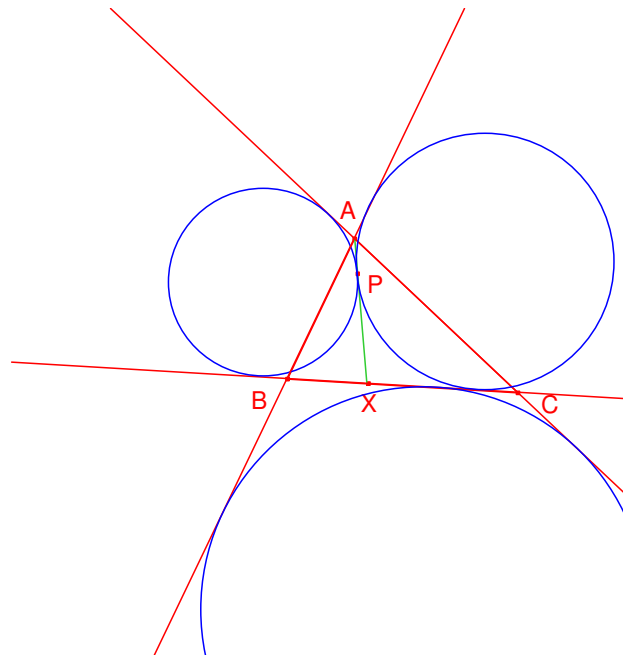


Figura 26

**Resolução:** Neste exercício convém realçar que o segmento  $AX$  é o mesmo segmento que no exercício anterior, por isso vamos poder estabelecer as mesmas relações. O raciocínio que utilizaremos neste exercício é bastante semelhante ao usado anteriormente, contudo iremos mostrar que  $AP = AQ$ . Sejam  $s$ ,  $s_1$  e  $s_2$  os semi-perímetros dos  $\triangle ABC$ ;  $\triangle ABX$  e  $\triangle ACX$ . Então

tal como já foi analisado no capítulo 11 (página 22), podemos estabelecer as seguintes relações:  $BX = s - b$ ;  $CX = s - c$ .

Agora, como o ponto  $P$  é o ponto de intersecção da circunferência ex-inscrita com o  $\Delta ABX$ , então  $BP$  é um spliter deste triângulo, logo podemos estabelecer as seguintes relações:

$$AP + AB = s_1 \Leftrightarrow AP = s_1 - c$$

Se considerarmos o ponto  $Q$  (que não está representado na figura) é o ponto de intersecção da circunferência ex-inscrita do  $\Delta ACX$ , então  $CP$  é um spliter deste triângulo, logo

$$AQ + AC = s_2 \Leftrightarrow AQ = s_2 - b$$

Agora,

$$AP - AQ = s_1 - c - s_2 + b = s_1 - s_2 - c + b$$

Por outro lado, temos que:  $2s_1 = c + BX + AX$  e  $2s_2 = b + AX + XC$

Assim,

$$\begin{aligned} 2s_1 - 2s_2 &= c + BX + AX - b - AX - XC = \\ &= c - b + BX - XC = c - b + (s - b) - (s - c) = \\ &= 2c - 2b \end{aligned}$$

Deste modo,  $s_1 - s_2 = c - b$ , por isso:

$$AP - AQ = c - b - c + b = 0$$

■

## 15. Bibliografia

- [1] R. Honsberger, *Episodes of 19th and 20th Century Euclidean Geometry*, Math. Assoc. America, 1995.
- [2] Coxeter, H.S.M; Greitzer,S.L., *Geometry Revisited*, New Mathematical Library, 1981
- [3] Paulo Ventura Araújo, *Curso de Geometria*, Gradiva, 1999
- [4] A. Nascimento P. Fernandes, *Elementos de Geometria*, Livraria Didáctica, 1956
- [5] Georges Alain, *Dicionário prático de Matemática*, Terramar, 1995
- [6] A. Fetissov, *A Demonstração em Geometria*, Ulmeiro, 2001

**Dados do autor**

**Sou o Ricardo Portugal, tenho 24 anos e licenci-me este ano (2007/2008) em Matemática via ensino na Universidade da Beira Interior.**

**Esta monografia foi elaborada por mim e orientada pelo professor Rui Pacheco, no âmbito do meu trabalho científico.**